The 11th Workshop on Finite Field Theory
and its Application for Pseudo-Random
Sequences (FFTPRS2025)
Hita (Hybrid), September 16-17, 2025

有限体上のアダマール型行列とウェイイング行列
Hadamard-type Matrices over Finite Fields and Weighing Matrices

小嶋 徹也 *
Tetsuya KOJIMA

Abstract— Hadamard matrix is defined as a square matrix where any components are -1 or $+1$, and where any pairs of rows are mutually orthogonal. Hadamard-type matrix over finite fields is a similar one, but has multi-valued components on finite fields. To be more specific, we consider an $n \times n$ matrix H that has their elements on the given finite fields GF(p), and satisfies $HH^T = nI$, where I is an identity matrix. Any additions and multiplications should be executed under modulo p. On the other hand, a weighing matrix is an $n \times n$ matrix W with entries from $\{-1, 0, +1\}$, satisfying $WW^T = kI$, where an integer k is called the weight of W. In this report, we discuss the relationship between Hadamard-type matrices over GF(p) and weighing matrices.

Keywords— Hadamard-type matrix, finite field, weighing matrix, quadratic residue

1 まえがき

アダマール行列（Hadamard matrix）H は $\{-1, +1\}$ 上に値をとり，各行が互いに直交する正方行列 H として定義される [1]．すなわち，H は $HH^T = nI$ を満たす．ここで，^{T} は行列の転置，I は単位行列，n は正方行列の次数を表す．アダマール行列は符号理論，無線通信，統計的推定，圧縮センシングなど，さまざまな分野に応用されている [2, 3]．特に，ウォルシュ・アダマール符号やリード・マラー符号，さらには n シフト直交系列や完全相補系列系 [4] などの符号系列生成の分野では極めて重要な役割を果たしている．

著者らはアダマール行列の概念を有限体上に拡張したアダマール型行列（Hadamard-type matrix）を提案し，その生成法を示した [5–9]．正確には，n 次のアダマール型行列 H は p を任意の奇素数とするとき，GF(p^m) 上に値をとり，各行が互いに直交し，$HH^T = nI$ を満たす正方行列として定義される．ここで，いかなる加算および乗算も p および与えられた既約多項式 $f(x)$ を法として行なうこととする．以下では簡単のため，有限体として素体 GF(p) のみを考えることとする．

文献 [7] では，計算機探索により新種のアダマール型行列が発見され，その例が示されている．特に，巡回性を有する行列については，その存在条件を示すことで，行列の生成法を与えている．また，$GF(p)$ 上のアダマール型行列の次数 n が奇数の場合には，巡回性の有無に限らず，n は p の平方剰余に限られることが示されている [7]．一方，次数 n が 2 以上の偶数の場合においては，有限体上のアダマール型行列が少なくとも 1 つ存在することが証明されている [9]．これにより，有限体上のアダマール型行列の次数が偶数であるか奇数であるかに関わらず，その存在条件が与えられたことになり，2 値のアダマール行列と比較して，そのバリエーションははるかに豊かであることが示されている [9]．

ウェイイング行列（weighing matrix）は，$\{-1, 0, +1\}$ の 3 値を値とする n 次正方行列 W で，関係式 $WW^T = kI$ を満たすものとして定義され，$W = W(n, k)$ と表記される．ここで，k は行列 W の重みと呼ばれる正整数である．行列 $W = W(n, k)$ は，$k \leq n$ を満たす重み k に対し，次数 n が $n \equiv 0 \pmod 4$ を満たすときに存在することが予想されている [10, 11]．

GF(3) 上の H-型行列は，$\{0, 1, 2\}$ 上に値をとり，$HH^T = 3I$ を満たすことから，ウェイイング行列の特別な場合と考えることができる．本報告では，GF(3) 上の H-型行列とウェイイング行列の関係について，特に存在条件の観点から考察する．

2 有限体上のアダマール型行列

2.1 記号の定義

本報告では，特に断らない限り以下のような記号を使用する．

- p：奇素数
- $H = [h_{ij}]$：行列
- ^{T}：ベクトルあるいは行列の転置
- I：単位行列
- O：零行列
- $\sqrt{n}$：$GF(p)$ 上における元 n の平方根
- $A \otimes B$：行列 A，B のクロネッカー積

2.2 アダマール型行列の定義

本節では，GF(p) 上のアダマール型行列の定義を与える [7]．

* 〒193-0997 東京都八王子市椚田町 1220-2 東京工業高等専門学校 情報工学科．Department of Computer Science, National Institute of Technology, Tokyo College, 1220-2, Kunugidamachi, Hachioji, Tokyo, Japan 193-0997. E-mail: kojt@tokyo-ct.ac.jp

定義 1 (アダマール型行列)．任意の奇素数 p に対し，有限体 GF(p) 上の n 次**アダマール型行列**（Hadamard-type matrix）とは，GF(p) 上にとる n 次正方行列，すなわち，$\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ 上の n 次正方行列で，任意の異なる 2 行が互いに直交し，かつ各行のノルムが n に等しいものとして定義される．すなわち，GF(p) 上の n 次アダマール型行列 H は $HH^T = nI$ を満たす．本報告では，以下，アダマール型行列を **H-型行列**（H-type matrix）と短縮して呼ぶ．

以下，GF(p) 上における加算と乗算はすべて p を法として行なうこととする．

注 1. 行列の次数 n が p の平方剰余であるとき，単位行列に $\sqrt{n}$ を乗じた行列：

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{n} \cdot I \tag{1}$$

も $HH^T = nI$ を満たすため，H-型行列の一種と考えられる．ここで，$\sqrt{n}$ は前節で述べた通り n の GF(p) 上における平方根であり，n が p の平方剰余でなければ，そのような値は存在しない．

2.3 H-型行列の例

例 1. GF(5) 上の行列：

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

は $HH^T = 2I$ を満たすため，GF(5) 上の 2 次 H-型行列である．$4 \equiv -1 \pmod 5$ より，この行列は 2 値のアダマール行列

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

と本質的に同一である．

文献 [7] では，計算機により H-型行列を探索した．次にこの計算機探索で発見された H-型行列を紹介する [7]．

例 2. GF(11) 上の行列：

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & 7 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 10 & 9 & 3 & 10 \end{bmatrix} \tag{4}$$

は $HH^T = 5I$ を満たすため，GF(11) 上の 5 次 H-型行列である．

式（4）の行列は第 1 行と第 1 列がすべて 1 である．2 値のアダマール行列の場合にならい，このような行列を**標準型 H-型行列**（standard-form H-type matrix）と呼ぶ．

ここで，H-型行列の特別な場合として，以下のような行列を定義する [7]．

定義 2 (巡回 H-型行列)．a，b を GF(p) 上の異なる 2 つの元とするとき，

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \tag{5}$$

なる形で書ける H-型行列，すなわち，対角成分がすべて同じ値 a であり，それ以外の成分がすべて b であるような行列を巡回 H-型行列と呼ぶ．

定義 3 (標準型巡回 H-型行列)．a，b を GF(p) 上の異なる 2 つの元とするとき，

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{bmatrix} \tag{6}$$

なる形で書ける H-型行列，すなわち，1 行目と 1 列目の成分がすべて 1 である標準型 H-型行列であり，かつ，1 行目 と 1 列目を除いた小行列が巡回 H-型行列であるような行列を標準型巡回 H-型行列と呼ぶ．

例 3. GF(11) 上の行列：

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 9 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 9 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 9 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 9 \end{bmatrix} \tag{7}$$

は $HH^T = 5I$ を満たすため，GF(11) 上の 5 次巡回 H-型行列である．また，同じく GF(11) 上の行列：

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 & 9 & 9 \\ 1 & 9 & 5 & 9 & 9 \\ 1 & 9 & 9 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 9 & 9 & 5 \end{bmatrix} \tag{8}$$

も $HH^T = 5I$ を満たすため，GF(11) 上の 5 次標準型巡回 H-型行列である．

文献 [7] では，計算機探索により，上の例 2，3 に示したような行列が発見されたことが示されており，巡回 H-型行列，標準型巡回 H-型行列についてはその生成法が与えられている．

2.4 H-型行列の性質

著者らのこれまでの研究で，H-型行列に関するさまざまな性質が証明されている．ここではそれらのうち，特に重要なものについて紹介する．まず，H-型行列の次数について，以下のことが知られている．

定理 1. [7] p を奇素数とし，行列の次数 n も $n \not\equiv 0 \mod p$ を満たす奇素数であるとする．このとき，n が p の平方剰余であるとき，かつこのときに限り，GF(p) 上の n 次の H-型行列が存在する．

この定理から，行列の次数 n が奇数であるとき，その次数は与えられた奇素数 p の平方剰余に限られることがわかる．また，n が偶数の場合には次のことを示すことができる．

定理 2. [9] 任意の素数 p と $n \not\equiv 0 \pmod p$ を満たす任意の偶数 n に対し，n を次数とする H-型行列が存在する．

すなわち，偶数次数の H-型行列は任意の次数で生成することができる．なお，通常の 2 値のアダマール行列の場合は，次数は 4 の倍数に限られると予想されている [2,3]．したがって，有限体上の H-型行列の場合は，2 値の場合にはアダマール行列が存在しない次数に対しても直交性を有する行列を生成可能であることになり，応用面から考えてもはるかに自由度が高いことがわかる．

以上より，行列の次数が奇数である場合と偶数である場合の両方について，H-型行列が存在するための条件が示されたことになる．

3 ウェイイング行列

3.1 ウェイイング行列の定義

ウェイイング行列は以下のように定義される [10,11]．

定義 4. ウェイイング行列（weighing matrix）は，3 個の整数値 $\{-1, 0, +1\}$ を成分とする $n \times n$ 行列 $W \overset{\mathrm{def}}{=} W(n, k)$ であり，$WW^T = kI$ を満たす行列である．ここで，k は行列 W の**重み**（weight）と呼ばれる正整数である．

ウェイイング行列と 2 値のアダマール行列の間には以下のような関係があることが知られている．

注 2. 重み n の n 次ウェイイング行列 $W = W(n, n)$ は $WW^T = nI$ を満たし，$\{-1, +1\}$ の 2 値を成分とするアダマール行列に他ならない．

3.2 ウェイイング行列の意味

偏りのない二皿の天秤を用いて，p 個の物体の重さを n 回の秤量で測定することを考える．天秤の目盛によって，どちらの皿がどれだけ重いかが計量できることを仮定する．ここで $n \times p$ 行列 $X = [x_{ij}]$ を考え，各成分 x_{ij} が以下のような規則で定められるものとする．

- i 回目の秤量で左の皿に j 番目の物体が置かれたとき，$x_{ij} = 1$ とする
- i 回目の秤量で右の皿に j 番目の物体が置かれたとき，$x_{ij} = -1$ とする
- i 回目の秤量で j 番目の物体が計量されなかったとき，$x_{ij} = 0$ とする

この行列 X は秤量方式の方針を表しており，以下では**秤量設計行列**（weighing design matrix）と呼ぶことにする．

ここで，二つの列ベクトル $\boldsymbol{w} \overset{\mathrm{def}}{=} (w_1, w_2, \ldots, w_p)^T$, $\boldsymbol{y} \overset{\mathrm{def}}{=} (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ を考える．ここで，各 w_i は i 番目の物体の真の重量であるとし，各 y_i は i 回目の秤量における結果，すなわち，y_i は i 回目の秤量で左の皿が右の皿を上回った重量であるとする．このとき，n 回の秤量の結果は以下のように表すことができる：

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{w} + \boldsymbol{e}. \tag{9}$$

ここで，列ベクトル $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ は n 回の各秤量における誤差を表す．誤差ベクトル $\boldsymbol{e}$ は確率変数であり，その平均はゼロベクトル $\mathbf{0}$ で，共分散行列は $\sigma^2 I$ で与えられると仮定する．物体の真の重量を表すベクトル $\boldsymbol{w}$ は

$$\widehat{\boldsymbol{w}} = (X^T X)^{-1} X^T Y \tag{10}$$

のように推定できる．ただし，$\widehat{\boldsymbol{w}}$ もランダムな誤差を含むことから確率変数であることに注意する．

Hotelling は，どのような秤量方法を用いても，各物体の重量の推定量 $\widehat{w}_i$ の分散を $\dfrac{\sigma^2}{n}$ より小さくすることができないことを示した [12]．したがって，秤量方式の設計（weighing design）は，各物体の重量 w_i がこの最小分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ と等しいとき，最適であると定義する．秤量設計 X は $X^T X = nI$ が成り立つとき，かつこのときに限り最適であることが示されている [11]．すなわち，X は $\{-1, 1\}$ を成分とする $n \times p$ 行列で，かつ各列が直交である場合に最適であるということができる．このことから，以下の定理が成り立つ．

定理 3. [11] n 次アダマール行列の任意の p 列（$p \leq n$）を並べて作られた $n \times p$ 行列は，最適な秤量設計を与える．

ただし，アダマール行列は成分に 0 を含まないため，毎回の秤量で p 個の物体すべてを，左右いずれかの皿に置く場合に相当している．これに対し，ウェイイング行列は，毎回の秤量で p 個の物体すべてを用いない場合も含めて一般化した概念となっており，注 2 で示した通り，その特別な場合としてアダマール行列を含んでいる．

3.3 ウェイイング行列の存在条件

ウェイイング行列の存在条件としては，以下のような予想が存在する [10,11].

予想 1. [10,11] $n \equiv 0 \pmod 4$ であるとき，$k \leq n$ を満たす任意の重み k に対し，$n \times n$ ウェイイング行列 $W = W(n,k)$ が存在する．

注 3. 注 2 で述べた通り，重み n のウェイイング行列はアダマール行列に他ならない．前述の通り，アダマール行列の次数は 4 の倍数に限られると予想されているが，上の予想 1 は，アダマール行列の次数に関する予想の一般化になっていると考えられる．

文献 [11] では，84 以下の 4 の倍数 $n = 4t \ (t \leq 21)$ については，ウェイイング行列の存在が確認できていることが述べられている．

n の関数 $g(n)$ を，$k \leq q$ を満たすすべての重み k についてウェイイング行列 $W(n,k)$ が存在するような最大重み q と定義する．このとき，上の予想 1 は，$n \equiv 0 \pmod 4$ を満たす任意の n に対し，$g(n) = n$ が成り立つ，と言い換えることができる．文献 [10] では，一般に $g(2^n) = 2^n$ が成り立つことが示されている．すなわち，次数 n が 2 のべき乗であれば，$k \leq n$ である任意の重みに対し，ウェイイング行列 $W(n,k)$ が存在する．さらに，任意の奇数 n と任意の $k \geq 1$ に対し，$g\left(2^k n\right) \geq 2^k$ が成り立つことも示している．

4 H-型行列とウェイイング行列の関係

以下では，行列 H を GF(3) 上の H-型行列とする．$2 \equiv -1 \pmod 3$ であり，$HH^T = nI$ であるため，行列 H はウェイイング行列 $W(n,n)$ に他ならないことがわかる．以下では，GF(3) 上の H-型行列の存在条件を検証し，その結果にもとづいてウェイイング行列との関係を考えてみる．

4.1 巡回 H-型行列

定理 1 より，次数 n が奇数の場合，次数は 3 の平方剰余でなければならない．3 の平方剰余は 1 のみである．次数 1 の行列は無意味であるが，$n \equiv 1 \pmod 3$ を満たす H-型行列は生成可能である．文献 [7] で示された方法を用いれば，GF(3) 上の標準型巡回 H-型行列や非標準型の巡回 H-型行列が生成可能である．以下に次数が $n = 4$ の場合と $n = 7$ の場合についてそれぞれ示す．

例 4. GF(3) 上の 4 次標準型巡回 H-型行列としては，

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

が求められる．また，非標準型の巡回 H-型行列としては，

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

または

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

が求められる．これらはすべて $HH^T = I \equiv 4I \pmod 3$ を満たし，本質的に．$W(4,4)$ と同一であると考えられる．また，これらの行列はすべて従来の 2 値の 4 次アダマール行列とも同一であると考えられる．

例 5. GF(3) 上の 7 次（非標準型）巡回 H-型行列としては，

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

または

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

が求められる．これらはすべて $HH^T = I \equiv 7I \pmod 3$ を満たし，本質的に．$W(7,7)$ と同一であると考えられる．これらの行列を用いて秤量設計を行なうと，左右一方の皿に単一の物体を置き，残りのすべてをもう一方の皿に置く，という秤量をすべての物体について n 回繰り返すことを意味している．

上の例 5 に示す通り，GF(3) 上の H-型行列としては次数が 4 の倍数のものに限らず，奇数次数のものも生成することが可能である．ただし，奇数次であっても，定理 1 に示すように次数が 3 の倍数である場合は H-型行列は存在せず，あくまでも $n \equiv 1 \pmod 3$ であることが必要である．

4.2　偶数次 H-型行列

定理 2 に示すように，偶数次数の場合は，$n \not\equiv 0 \pmod 3$ の場合に限り，任意の偶数次数の H-型行列を生成可能である．したがって，次数が 4 の倍数であれば任意の次数で生成可能であり，4 の倍数でない場合であっても，$n = 10$ や $n = 14$ の場合は生成可能である．以下に例を示す．

例 6. GF(3) 上の 2 次対角行列：

$$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

は $AA^T = I$ を満たすため，H-型行列である．2 次の零行列 O を用いて，

$$H_{10} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{bmatrix} A & O & O & O & O \\ O & A & O & O & O \\ O & O & A & O & O \\ O & O & O & A & O \\ O & O & O & O & A \end{bmatrix} \tag{17}$$

のように 10 次行列を構成すると，この行列も $H_{10}H_{10}^T = I$ を満たすため，GF(3) 上の 10 次 H-型行列であると考えられる．ただし，各行における非零元はただ 1 つのみであるため，ウェイイング行列としては $W(10, 1)$ と同一で，本質的に単位行列を用いて物体を 1 個ずつ秤量する場合と同等である．

例 7. 例 5 で示した 7 次 H-型行列 H のいずれかと，上の例 6 で用いた 2 次対角行列 A のクロネッカー積を用いて，

$$H_{14} \stackrel{\mathrm{def}}{=} A \otimes H \tag{18}$$

のように 14 次 H-型行列を生成することができる．この行列は GF(3) 上で $H_{14}H_{14}^T = I$ を満たす．ただし，各行における非零成分の個数は 7 個に過ぎないので，実質的にはウェイイング行列 $W(14, 7)$ と同等である．秤量の設計方針としては，全体の n 個の物品を半分に分け，前半と後半に分けて各回の秤量で 1 個だけを一方の皿に置き，残りをもう一方の皿に置く，という方針で計量することに相当している．

5　むすび

GF(3) 上の H-型行列とウェイイング行列の関係について考察した．ウェイイング行列の存在に関する予想は $k \le n$ を満たすすべての k について行列が存在することを考えているが，H-型行列はたかだか $k \equiv 1 \pmod 3$ の場合について存在が示されているだけであり，本質的にはウェイイング行列の特別な場合であると考えることができる．

参考文献

[1] J. Hadamard, “Résolution d’une question relative aux determinants,” Bulletin des Sciences Math’ematiques, vol.17, no.2, pp.240–246, Sept. 1893.

[2] A. Hedayat and W.D. Wallis, “Hadamard matrices and their applications,” Annals of Statistics, vol.6, no.6, pp.1184–1238, Nov. 1978.

[3] K.J. Horadam, Hadamard Matrices and Their Applications, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, Dec. 2006.

[4] N. Suehiro and M. Hatori, “N-shift cross-orthogonal sequences,” IEEE Trans. Inf. Theory, vol.34, no.1, pp.143–146, Jan. 1988.

[5] T. Kojima, “Hadamard-type Matrices on Finite Fields and Complete Complementary Codes,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E102-A, no.12, pp.1651–1658, Dec. 2019.

[6] T. Kojima, “Hadamard-type Matrices on Finite Fields and Some Open Problems,” IEICE Technical Report, vol.119, no.198, pp.29–34, Sept. 2019.

[7] I. Kodama and T. Kojima, “New Varieties of Hadamard-type Matrices over Finite Fields and Their Properties,” IEICE Trans. Fundamentals, vol.E108-A, no.3, pp.450–458, Mar. 2025.

[8] T. Kojima and I. Kodama, “Classification and Generation of the Hadamard-type Matrices of Third Order over Finite Fields,” to appear in IEICE Trans. Fundamentals, vol.E109-A, no.3, Mar. 2026.

[9] I. Kodama and T. Kojima, “On Hadamard-type Matrices of Even Orders over Finite Fields,” to appear in IEICE Trans. Fundamentals, vol.E109-A, no.3, Mar. 2026.

[10] A. V. Geramita, N. J. Pullman and J. Seberry. Wallis, “Families of Weighing Matrices,” Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol.10, pp.119–122, Feb. 1974.

[11] C. Koukouvinos and J. Seberry, “Weighing Matrices and Their Applications,” Journal of Statistical Planning and Inference, vol.62, no.1, pp.91–101, Jul. 1997.

[12] H. Hotelling, “Some Improvements in Weighing and Other Experimental Techniques,” Annals of Mathematical Statistics, vol.15, no.3, pp.297–306, Sept. 1944.